

# Processus de Lévy et finance

Guillaume Coqueret \*

April 14, 2010

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction: pourquoi les processus de Lévy en finance ?</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Propriétés des processus de Lévy</b>	<b>2</b>
2.1	Formule de Lévy-Khintchine . . . . .	2
2.2	Décomposition de Lévy-Itô . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Mesures martingales équivalentes</b>	<b>4</b>
3.1	Un exemple: la transformée d'Esscher . . . . .	5
3.2	Entropie . . . . .	5
3.3	Remarque . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Calibration</b>	<b>6</b>
4.1	Les prix d'options comme outputs . . . . .	6
4.2	Les prix d'options comme inputs . . . . .	6
4.3	Une solution intermédiaire . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Pour aller plus loin</b>	<b>7</b>
5.1	Accroissement non-stationnaires . . . . .	7
5.2	Volatilité stochastique . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Conclusion / Perspectives</b>	<b>7</b>

NOTA: la présente note ne concerne que les options européennes et les exemples fournis sont des calls (options d'achat). Seul le cas unidimensionnel est ici traité.

NOTATION:  $X \stackrel{d}{=} Y$  veut dire que  $X$  et  $Y$  ont même loi.  $\mu = \mathcal{L}(X)$  veut dire que  $\mu$  est la loi de la variable aléatoire  $X$ .

## 1 Introduction: pourquoi les processus de Lévy en finance ?

Il y a plusieurs moyens de répondre à cette question. Prenons comme point de départ le modèle de Black-Scholes, où le sous-jacent,  $S_t$ , se "diffuse" (sous une certaine probabilité) dans le temps en suivant l'équation suivante:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \quad \forall t \geq 0$$

où  $S_0$  est la valeur à l'origine du sous-jacent,  $r$  est le taux sans risque,  $\sigma$  est la volatilité du sous-jacent et  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien standard. Le sous-jacent est donc représenté par l'exponentielle d'un mouvement Brownien drifté (autrement appelée mouvement Brownien géométrique). Comme les rendements du sous-jacent sont calculés de la manière suivante:

$$r(t_i, \Delta t) = \log \left( \frac{S_{t_i}}{S_{t_i - \Delta t}} \right)$$

où  $t_i$  est l'instant auquel on calcule le rendement et  $\Delta t$  la période sur laquelle on calcule le rendement. On a donc

$$r(t_i, \Delta t) = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (W_{t_i} - W_{t_i - \Delta t})$$

---

\*Essec Business School / Université de Lille-1

Considérons alors les propriétés du mouvement Brownien (en fait ces caractéristiques le définissent):

- il a des accroissements indépendants: pour  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$ ,  $W_{t_3} - W_{t_2}$  est une variable aléatoire indépendante de  $W_{t_2} - W_{t_1}$
- ses accroissements sont stationnaires: si  $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$  alors  $W_{t_3} - W_{t_2}$  a la même loi que  $W_{t_2} - W_{t_1}$
- $\forall t > 0$ ,  $W_t$  suit une loi normale centrée de variance égale à  $t$  (notée  $N(0, t)$ )

Cela implique que  $r(t_i, \Delta t)$  est égal en loi à  $N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$ . Nous voyons que le rendement ne dépend pas de l'instant  $t_i$  mais seulement de  $\Delta t$ . Cela pose problème et nous allons voir pourquoi. Faisons l'inventaire des propriétés des rendements dans le modèle: si l'on considère par exemple que l'on calcule les rendements d'une action tous les jours, sur une période de 24 heures, alors ces rendements doivent être:

- indépendants
- de même loi
- distribués selon une loi normale

Et en plus, la trajectoire du sous-jacent doit être continue car celle du mouvement Brownien l'est. Empiriquement, on observe sur les marchés que les rendements sont:

- corrélés
- non identiquement distribués
- tout sauf gaussiens

et surtout, la trajectoire du sous-jacent n'est certainement pas continue et peut exhiber des sauts à certaines périodes de forte volatilité (une référence très technique et théorique sur le sujet est [1]).

Ainsi, toutes les hypothèses du modèle de Black-Scholes sont fausses dans la pratique. On peut donc proposer des alternatives moins contraignantes du point de vue des hypothèses, mais cela entraînera des complications dans la solution du problème. Les processus de Lévy ont simplement 2 caractéristiques: leurs accroissements sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.). Deux autres propriétés fondamentales sont la continuité stochastique et le fait qu'ils ont des trajectoires presque sûrement continues à droite et limitées à gauche (càdlàg), mais nous passons ces détails sous silence pour l'instant. Le mouvement Brownien drifté est donc un processus de Lévy.

*NOTA: malgré l'avantage que présente les processus de Lévy sur l'approche de Black-Scholes, l'utilisation de tels processus ne permet pas de corriger les problèmes de corrélation des rendements, ni le fait que ceux-ci soient i.i.d. Ils permettent de se défaire de la contrainte gaussienne et autorisent des trajectoires discontinues (i.e. avec des sauts).*

## 2 Propriétés des processus de Lévy

Une référence très complète (mais technique) sur cette section est le livre [11], chapitres 8 et 19. Dans la suite de la section,  $X$  sera toujours un processus de Lévy.

### 2.1 Formule de Lévy-Khintchine

Soit  $t > 0$ , on peut alors écrire pour tout  $n \geq 1$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  avec  $t_i - t_{i-1} = 1/n$ ,

$$X_t = (X_t - X_{t_{n-1}}) + (X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}) + \dots + (X_{t_1} - X_{t_0})$$

et donc quel que soit  $n > 1$ , on peut trouver une variable aléatoire  $Y^{(n)}$  de loi  $\mu^{(n)}$  telle que  $X_t$  ait la même loi que  $\sum_{i=1}^n Y_i^{(n)}$  où les  $Y_i^{(n)}$  sont des copies indépendantes de  $Y^{(n)}$  (où cette variable est bien entendu la loi de l'accroissement  $X_{t_1} - X_{t_0} = X_{t_1}$ ). En termes mathématiques, cela veut dire que la loi de  $X_t$  est infiniment divisible (ID). Le principal résultat concernant les lois ID est la

#### Theorem 2.1 Représentation de Lévy-Khintchine

Soit  $\mu = \mathcal{L}(X_1)$  une loi ID sur  $\mathbb{R}$ , alors sa fonction caractéristique (ou transformée de Fourier) est donnée par

$$\hat{\mu}(z) = \mathbb{E}[e^{izX}] = \int e^{izx} \mu(dx) = \exp\left(idz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)) \nu(dx)\right) = \exp(\psi(z)) \quad (2.1)$$

où  $d \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$  et  $\nu$  est une mesure positive ne chargeant pas  $\{0\}$  et telle que  $\int (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$ , où  $a \wedge b = \min(a, b)$ . On appelle  $\psi$  l'exposant caractéristique et  $(b, \sigma^2, \nu)$  le triplet caractéristique de  $\mu$  (et donc de  $X$ , voir ci-dessous).

Cette représentation est unique et la réciproque est vraie : si  $\mu$  admet un exposant caractéristique de la forme de  $\psi$ , alors elle est ID. Continuons alors le lien avec les processus de Lévy.

Si  $X$  est un tel processus et que l'on pose  $\mu = \mathcal{L}(X_1)$ , alors on voit immédiatement que pour un entier  $n > 1$ ,

$$\mathbb{E}[e^{izX_n}] = \mathbb{E}[e^{iz(X_1-X_0)} \dots e^{iz(X_n-X_{n-1})}] = \mathbb{E}[e^{iz(X_1-X_0)}] \dots \mathbb{E}[e^{iz(X_n-X_{n-1})}] = \mathbb{E}[e^{izX_1}]^n = e^{n\psi(z)}$$

Où on a utilisé d'abord l'indépendance des accroissements, puis leur stationnarité. En fait, on peut facilement généraliser cette propriété à tous les instants réels et on a pour  $t > 0$

$$\mathbb{E}[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)}$$

A tout instant, le processus est donc entièrement déterminé par son triplet caractéristique, il suffit donc de le connaître à l'instant  $t = 1$ . On dit que  $d$  est le drift,  $\sigma^2$  la partie gaussienne et  $\nu$  la mesure de saut. Si  $\nu = 0$ , alors on retombe sur le mouvement Brownien drifté. C'est ce que montre la prochaine section qui caractérise les processus de Lévy en fonction de leur comportement trajectorien.

## 2.2 Décomposition de Lévy-Itô

Avant de citer le théorème fondamental de cette section, il faut introduire un outil indispensable, la

### Definition 2.1 Mesure aléatoire de Poisson

Soit  $(E, \mathcal{B}, \rho)$  un espace mesuré où  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est l'ensemble borélien de tous les ouverts de  $\mathbb{R}$  et  $\rho$  une mesure positive  $\sigma$ -finie. On appelle mesure aléatoire de Poisson d'intensité  $\rho$  une famille  $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  de variables aléatoires dans  $\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$  telle que

- $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $N(B)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\rho(B)$
- si  $B_1, \dots, B_n$  sont disjoints,  $N(B_1), \dots, N(B_n)$  sont des variables aléatoires indépendantes
- $\forall \omega$ ,  $N(\cdot, \omega)$  est une mesure sur  $E$

Pour une présentation très détaillée et rigoureuse, voir [9]; pour une présentation plus simple et claire, voir [5].

La représentation de Lévy-Khintchine est très analytique: elle ne nous dit rien sur les caractéristiques des trajectoires du processus de Lévy. On sait que pour  $\nu = 0$ , le processus est un mouvement Brownien drifté, processus que nous connaissons bien. Que se passe-t-il lorsque  $\nu$  n'est pas nulle ? Le résultat qui suit montre que l'on peut décomposer tout processus de Lévy en trois parties distinctes qui sont autant de processus indépendants:

- un drift déterministe de la forme  $d(t) = at$ ,  $a \in \mathbb{R}$
- une partie gaussienne de la forme  $\sigma B_t$  où  $B_t$  est un mouvement Brownien et  $\sigma > 0$
- un processus incorporant tous les sauts du processus, lequel est lui-même subdivisé en 2 processus: un pour les grands sauts et l'autre pour les petits

### Theorem 2.2 Décomposition de Lévy-Itô

Soient  $d \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$  et  $\nu$  une mesure positive ne chargeant pas  $\{0\}$  et telle que  $\int (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$ . Si on définit pour  $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ,

$$J(D) = \#\{s : (s, X_s - X_{s-}) \in D\}$$

alors  $J$  est une mesure aléatoire de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  d'intensité  $\rho$  telle que  $\rho([0, t] \times B) = t\nu(B)$ . De plus, il existe un espace de probabilité où l'on peut construire les trois processus indépendants suivants

- $X_t^1 = dt + \sigma B_t$
- $X_t^2 = \int_{[0, t] \times ]1, +\infty[} x J(ds, dx)$
- $X_t^3 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{[0, t] \times ]\varepsilon, 1]} x \{J(ds, dx) - s\nu(dx)\}$

et en additionnant les trois, on obtient le processus  $X$  d'origine (sa fonction caractéristique est notamment donnée par 2.1).

Ce résultat appelle plusieurs commentaires:

- la mesure  $J([s, t] \times B)$  compte en fait le nombre de sauts dont la taille est comprise dans  $B$  et qui ont été effectués entre les temps  $s$  et  $t$
- $X^1$  est la composante continue de  $X$
- $X^2$  est la composante complètement discontinue de  $X$  qui comporte les sauts plus grands que 1
- $X^3$  est la composante purement discontinue de  $X$  qui comporte les sauts plus petits que 1
- dans la définition de  $X^3$ , on soustrait immédiatement la moyenne des petits sauts car sinon l'intégrale pourrait diverger. A la manière d'un processus de Poisson compensé,  $X^3$  est d'ailleurs une martingale (mais ce résultat n'a rien de trivial - cf Théorème 2.10 dans [9])
- enfin, de manière plus ou moins directe, on récupère le fait que  $X$  est une semi-martingale

### Interprétation graphique

Ci-dessous est représenté une trajectoire d'un processus qui est l'addition d'un mouvement brownien et d'un processus

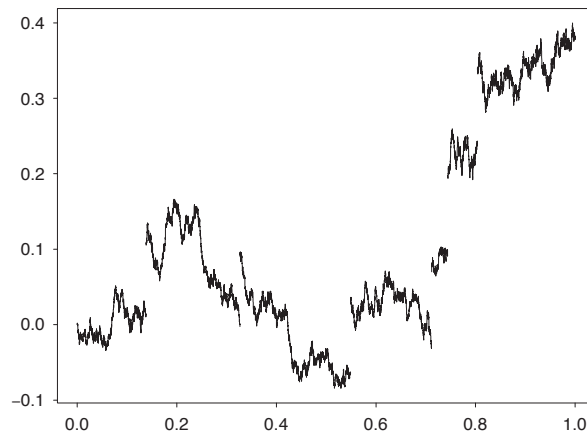


Figure 2.2.1: Sample path of a jump-diffusion process

de Poisson composé (indépendant). Dans ce cas, la représentation est simplifiée en:

$$X_t = B_t + \sum_{n=0}^{N_t} Y_n$$

où  $N_t$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda t$  et les variables  $Y_n$  sont i.i.d. On en livre la fonction caractéristique

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \exp\left(-\frac{tu^2}{2} + \lambda t \int_{\mathbb{R}^*} (e^{iux} - 1)f(dx)\right)$$

où  $f$  est la loi de  $Y_1$ .

Sur le graphe, on remarque bien la trajectoire brownienne, continue, qui est parfois perturbée par les sauts du processus de Poisson composé.

## 3 Mesures martingales équivalentes

Après le détour théorique sur les processus de Lévy, revenons à leur utilisation en finance. L'idée est bien sûr de considérer un actif est modélisé par

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

où  $X$  est un processus de Lévy. Une première remarque: si on considère un call, cela impose notamment que si on définit  $\phi(u) = \log(\mathbb{E}[e^{uX_1}])$ , alors il faut

$$e^{t\phi(u)} = \mathbb{E}[e^{uX_t}] < \infty$$

pour  $u$  contenu dans un certain intervalle de  $\mathbb{R}$  que nous appellerons  $I$ . Cette condition est assez contraignante (cf section 25 dans [11] pour plus de détails) et si elle n'est pas respectée, alors le prix du call écrit sur  $S$  est infini.

Cependant, la contrainte la plus forte résulte du raisonnement suivant. En théorie financière, une hypothèse fondamentale est l'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA): il est impossible de faire des bénéfices à coup sûr. Cela implique notamment que si l'on actualise la valeur d'un actif, alors il doit être une martingale sous au moins une certaine mesure (dite mesure martingale équivalente - MME - car cette mesure doit être équivalente (ou encore mutuellement absolument continue) à la mesure d'origine). Cela veut dire qu'il faut impérativement qu'il existe une mesure  $Q$  sous laquelle  $e^{-rt}S_t = S_0e^{X_t - rt}$  soit une martingale ( $r_t$  est le taux sans risque - que l'on simplifie souvent à  $rt$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ ). Nous noterons

$$(C) \quad \exists Q, \quad S_0e^{X_t - rt} \text{ est une martingale sous } Q \quad (3.1)$$

la condition nécessaire et suffisante d'AOA. Cela est lié aux notions de viabilité et complétude des marchés financiers (voir [10] ou [5] - chapitre 9 - pour plus de détails). Cela représente une contrainte assez abstraite. Pour des interprétations plus financières de la notion de changement de probabilité, nous renvoyons à [10].

### 3.1 Un exemple: la transformée d'Esscher

Une manière classique de s'en sortir est la suivante (introduite dans [8], mais largement reprise depuis). A processus de Lévy donné (i.e. on connaît sa loi au temps 1), on considère le changement de mesure ci-dessous (dite transformée d'Esscher):

$$\text{Pour un } u \text{ réel - à fixer ultérieurement, } \quad \frac{dQ^u}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{uX_t - t\phi(u)}$$

où  $\mathcal{F}_t$  est la filtration naturelle de  $X$  et  $P$  est la probabilité originelle (inobservable empiriquement, ou bien probabilité "historique").  $\phi$  est la variante de l'exposant caractéristique de  $X$ , définie en début de section. On remarque notamment que l'exponentielle est bien une martingale qui vaut 1 en 0, puisque  $\mathbb{E}[e^{uX_t}] = e^{t\phi(u)} < \infty$ .

Problème: comment se ramener au cas martingale ? On peut procéder comme dans [7] (par exemple): on a

$$\mathbb{E}^{Q^u} [e^{\theta X_t}] = e^{t(\phi(\theta+u) - \phi(u))}$$

Si on considère alors que le taux sans risque est fixe et vaut  $r$ , alors pour que  $Q^u$  soit une MME, on doit avoir, par 3.1,

$$e^{rt} = e^{t(\phi(\theta+u) - \phi(u))} \iff r = \phi(\theta + u) - \phi(u)$$

et comme le processus est donné et que  $\phi$  est donc connue, il ne reste qu'à résoudre l'équation en  $u$ . L'existence, l'unicité et l'appartenance à  $I$  de la solution ne sont pas des questions à négliger - voir notamment proposition 9.9 chez [5].

### 3.2 Entropie

On introduit ici un concept qui servira dans la section suivante. Quand on parle de changement de probabilité, une question un peu abstraite est de considérer une sorte de "distance" entre deux probabilités. Ainsi, en finance, on se rendrait compte si l'on s'éloigne de beaucoup ou de peu du modèle initial en changeant de probabilité.

Une mesure possible, appelée "entropie relative" ou "distance de Kullback-Leibler" est définie comme suit

$$\mathcal{E}(P, Q) = E^Q \left[ \ln \left( \frac{dP}{dQ} \right) \right]$$

Deux propriétés de cette distance sont bien évidemment qu'elle est positive mais aussi nulle si et seulement si  $P = Q$ .

### 3.3 Remarque

En fait, dans le modèle de Black-Scholes, le prix d'une option est unique car il existe une seule source d'aléa et donc une seule MME. Avec les processus de Lévy, les perturbations sont multiples s'il y a des sauts en plus d'une partie brownienne, et [6] montre notamment qu'il existe une infinité de MME dans ce cadre et donc une infinité de prix possibles pour une option (en fait, ces prix sont compris dans un intervalle - assez large). Une autre manière de dire cela est que les marchés "avec sauts" (hors processus de Poisson simple) sont viables, mais pas complets.

## 4 Calibration

Pour plus de détail concernant cette section, voir la thèse de Peter Tankov ([12]) ou bien son livre avec Rama Cont ([5]).

### 4.1 Les prix d'options comme outputs

Cette méthode est fondée sur l'observation historique des rendements de l'actif. Statistiquement, on est alors en mesure d'avoir la loi des rendements (pour un laps de temps donné, disons la journée) et on peut donc approcher cette loi par une loi paramétrique connue (de type hyperbolique, à 4 ou 5 paramètres, par exemple) pour obtenir un proxy de la distribution de  $X_1$ . Afin d'obtenir un bon proxy, il faut un minimum de points observés: si le  $\Delta t$  choisi est la journée, il faut au moins un an, voire plus d'historique. Il faut alors utiliser une méthode type moindres carrés ou maximum de vraisemblance pour obtenir les paramètres qui collent le mieux aux données de marché. On peut alors calculer numériquement la valeur de  $\mathbb{E}[e^{-rt}(S_t - K)_+]$ .

En fait, la théorie veut que l'on connaisse la densité de  $S_t$  ou  $X_t$  pour calculer l'espérance, mais Carr et Madan [3] ont montré qu'il suffit d'avoir la fonction caractéristique de la loi des rendements pour y parvenir.

Malheureusement, cette méthode ne produit pas (en général) des prix d'options consistants avec ceux du marché, d'où une seconde approche:

### 4.2 Les prix d'options comme inputs

Dans cette sous-section, le but est d'obtenir des prix d'options compatibles avec les prix du marché. On va donc utiliser les prix observés sur les marchés pour choisir les paramètres du modèle. Problème, ces paramètres sont de deux ordres: le triplet du processus de Lévy sous-jacent, et le choix de la probabilité de pricing (MME). Cela fait beaucoup de marge de manoeuvre. Une approche naive reviendrait à considérer le problème suivant.

On considère un actif  $S$  sur lequel sont écrits des calls de maturités et de strikes différents. On note, pour  $1 \leq i, j \leq n$  (sans perte de généralité, ça n'est pas grave de considérer le même nombre de strikes et de maturités)  $C_{i,j}$  le prix coté sur le marché du call de maturité  $T_i$  et de strike  $K_j$ . Par ailleurs, on notera  $C^{Q^\theta}(T_i, K_j)$  le prix du call pricé avec le processus de Lévy dont le triplet dépend du paramétrage  $\theta$  (numériquement, cela pose notamment des questions pour la mesure) et de la MME  $Q^\theta$  - notons au passage la dépendance de  $Q$  à  $\theta$ . Une manière de procéder est alors de chercher à résoudre:

$$\theta^* = \arg \min_{Q^\theta \in \mathcal{Q}} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \omega_{i,j} |C_{i,j} - C^{Q^\theta}(T_i, K_j)|^2 \quad (4.1)$$

où les  $\omega_{i,j}$  sont des poids que l'on veut donner à l'importance de l'option  $C_{i,j}$  (un critère pour cela est souvent la liquidité de l'option).  $Q^\theta$  est l'ensemble des MME associées au choix du paramètre  $\theta$  et  $\mathcal{Q}$  est l'ensemble de toutes les MME.

Un tel choix appelle quelques remarques:

- c'est un problème dit "inverse" et donc par nature, il se peut que plusieurs choix de paramètres et de MME marchent, ce qui pose problème. Il est également dit "mal posé", en référence aux problèmes bien posés, définis par Hadamard et qui doivent admettre une solution unique et qui dépend continûment des données initiales. Ici ça n'est clairement pas le cas.
- en effet, empiriquement, l'algorithme de résolution dépend fortement des choix initiaux (cf [12])

### 4.3 Une solution intermédiaire

Le choix d'une calibration reposant sur 4.1 n'est donc pas optimal. Une meilleure solution est apportée par Peter Tankov et est en quelque sorte à la croisée des deux types de calibration. Tout d'abord, grâce aux données historiques, il est possible de choisir un paramétrage de départ: sous la probabilité initiale  $P^0$ , le processus de l'actif est l'exponentielle d'un processus de Lévy dont on a identifié (ou approximé) le triplet  $(d_0, \sigma_0^2, \nu_0)$  - cf section 4.1. Nous voulons alors que la probabilité  $Q^\theta$  qui sera choisie ne soit pas trop étrangère à cette probabilité initiale, et donc on pénalise les solutions qui s'en éloignent. Afin de mieux poser le problème et rendre sa résolution plus facile, on considère alors qu'il faut minimiser, pour  $\alpha > 0$ ,

$$J(\theta) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \omega_{i,j} |C_{i,j} - C^{Q^\theta}(T_i, K_j)|^2 + \alpha \mathcal{E}(P^0, Q^\theta)$$

Le terme de l'entropie est convexe, ce qui fait que pour  $\alpha$  assez grand, on est assurés d'avoir une unique solution. Le choix d'un "bon"  $\alpha$  est donc déterminant et discuté dans le chapitre 13 de [5].

## 5 Pour aller plus loin

Pour rappel, les processus de Lévy ont des accroissements stationnaires et indépendants. Pour gagner en généralité et efficacité, il faut donc s'affranchir d'une de ces contraintes. Une raison empirique pour cela est qu'avec les processus de Lévy, on peut arriver à bien reproduire le phénomène de smile de volatilité pour une maturité donnée, mais cela se complique dès qu'on cherche à coller à plusieurs maturités. L'inhomogénéité en temps des accroissements permet d'améliorer cela.

### 5.1 Accroissement non-stationnaires

Les processus à accroissements indépendants sont aussi connus sous le nom de processus additifs et sont bien présentés dans [11]. Un exemple assez général de ce genre de processus est le suivant

$$X_t = d(t) + \int_0^t \sigma(s) dW_s + \sum_{n=0}^{N_{\Lambda}(t)} Y_i$$

où  $d$  est une fonction déterministe, la seconde partie est une intégrale stochastique avec une volatilité déterministe également et enfin la dernière partie est un processus de Poisson composé inhomogène. Ce processus est donc une généralisation de celui présenté dans l'illustration graphique.

Pour les détails techniques afférant notamment à la calibration, nous renvoyons au chapitre 14 de [5].

Un article ([4] - qui en a ensuite entraîné d'autres chez d'autres auteurs) traite des processus additifs auto-similaire, i.e. tels que pour tout  $a > 0$ , les processus  $X_{at}$  et  $a^H X_t$  aient les mêmes lois finies dimensionnelles. Le cas des options vanilles est traité, mais peu de choses concernant les fluctuations de ces processus sont connues, rendant difficile l'approche des options exotiques.

### 5.2 Volatilité stochastique

Malgré la grande généralité des processus additifs, ceux-ci, utilisés en finance en modèles exponentiels-additifs, génèrent malgré tout des rendements indépendants, ce qui est une absurdité empirique. En général, les modèles à volatilité stochastique se présentent comme une version généralisé du modèle de Black-Scholes: le sous-jacent se diffuse via l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t$$

où  $\sigma$  est elle-même aléatoire et issue d'une diffusion continue (souvent un processus positif de retour à la moyenne, à la Cox-Ingersoll-Ross).

Un des soucis avec ces modèles est qu'ils ne peuvent pas exhiber de sauts, alors on peut en ajouter "à la main", au moyen d'un processus de Poisson composé typiquement. Cela augmente néanmoins la difficulté de la calibration. On peut aussi procéder à l'inverse: prendre un processus de Lévy et en changer le temps pour en corrélérer les accroissements. Nous faisons ici référence au chapitre 15 de [5].

## 6 Conclusion / Perspectives

Les processus de Lévy sont une généralisation naturelle du mouvement brownien drifté en finance. Mais:

- la calibration de modèles en exponentielles de Lévy n'est pas triviale
- des défauts persistent (voir section précédente)

De plus, nous n'avons présenté ici qu'une toute petite possibilité d'utilisation de ces processus en finance, à savoir le pricing d'option. Toute discipline dans laquelle un processus aléatoire est observé peut néanmoins en tirer parti. En finance, des domaines comme le risque de crédit ou la gestion de portefeuille, voire la gestion des risques peuvent en tirer partie. La crise liée aux subprimes a révélé les très fortes limites de la modélisation avec le mouvement brownien, donc des processus plus complexes et plus généraux, comme ceux présentés ici, ont un bel avenir devant eux dans de nombreux domaines en finance.

### Commentaires sur les livres de la bibliographie:

- le livre de Jean Bertoin met l'accent sur l'aspect trajectoriel des processus de Lévy, et notamment la théorie des fluctuations qui traite, entre autre, des suprema et des temps d'arrêt, lesquels sont très utiles en finance (options barrières, options lookback par exemple). Les exercices ne sont pas corrigés.
- le livre de Ken-iti Sato est plus analytique, mais a l'avantage de traiter des processus additifs (processus de Lévy inhomogènes) et est très complet sur les processus stables. Beaucoup d'exercices corrigés.
- le livre de Kyprianou est très agréable à lire et contient beaucoup d'applications, comme son titre l'indique. Beaucoup d'exercices corrigés.
- enfin, le livre de Cont et Tankov est également très bien écrit, intuitif, (relativement) accessible et spécialement focalisé sur la finance, mais avec un niveau de maths assez élevé.

## References

- [1] Y. Ait-Sahalia, J. Jacod *Testing for Jumps in a Discretely Observed Process*, Annals of Statistics, 2009 (37), 184-222
- [2] J. Bertoin, *Lévy Processes*, Cambridge University Press, 1996
- [3] P. Carr, D. Madan, *Option Pricing and the Fast Fourier Transform*, Journal of Computational Finance, Summer 1999, Volume 2 Number 4, 61-73
- [4] P. Carr, D. Madan, H. Geman, M. Yor, *Self Decomposability and Option Pricing*, Mathematical Finance, Vol. 17, No. 1 (January 2007), 31-57
- [5] R. Cont, P. Tankov, *Financial modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall / CRC Press, 2003
- [6] E. Eberlein, J. Jacod, *On the range of option prices*, Finance and Stochastics Vol. I No. 2, 1997
- [7] E. Eberlein, U. Keller, *Hyperbolic distributions in Finance*, Bernoulli 1995 (1), 281-299
- [8] H. Gerber, E. Shiu, *Option pricing by Esscher transforms*, Transactions of the Society of Actuaries, 1994 (46),
- [9] A. E. Kyprianou, *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, Springer, 2006
- [10] P. Poncet, R. Portait, *Finance de marché*, Dalloz, 2009 (2ème édition)
- [11] K. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, 1999
- [12] P. Tankov, *Lévy Processes in Finance: Inverse Problems and Dependence Modelling*, thèse de l'Ecole Polytechnique, 1999