La volatilité implicite

Guillaume Coqueret

October 23, 2009

Contents

1 Théorie **1**

2 Pratique **2**
2.1 Calcul 2
2.2 Pour aller plus loin 3

3 La volatilité historique **3**

NOTA: la présente note ne concerne que les options européennes et les exemples fournis sont des calls (options d'achat). Seul le cas unidimensionnel est ici traité.

1 Théorie

Dans le modèle de Black-Scholes, le sous-jacent, S_t, se "diffuse" dans le temps en suivant l'équation suivante:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \quad \forall t \geq 0$$

où S_0 est la valeur à l'origine du sous-jacent, r est le taux sans risque, σ est la volatilité du sous-jacent et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. Une manière équivalente d'écrire cela est:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

cette équation décrit l'évolution infinitésimale de S_t, i.e. l'écart entre S_t et S_{t+h} quand h tend vers 0. De manière informelle, disons que r porte l'information du rendement du sous-jacent, puisque la moyenne du terme dW_t est nulle et que σ porte l'information de la variabilité du sous-jacent, puisque la source d'aléa est uniquement le mouvement Brownien. Les raisons pour lesquelles c'est le taux sans risque qui est choisi pour représenter le rendement du sous-jacent ne serons pas exposées ici. Disons simplement que nous observons l'état de la nature à travers un prisme qui est appelé "probabilité risque neutre" dans la litérature.

Nous rappelons qu'avec les notations précédentes, la formule de Black-Scholes de la valeur d'une option européenne d'achat du sous-jacent, de strike K et de maturité T est:

$$Call_{BS}(S_0, K, r, \sigma, T) = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{1.1}$$

où $N(x) = P(X \leq x)$ pour X suivant une loi normale centrée réduite, et

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dans la pratique, les informations descriptives du contrat sont connues (fixées) à l'avance. Il s'agit des paramètres S_0 (observé sur le marché spot), K et T (déterminés par les parties). Le taux sans risque présente une petite subtilité, mais disons qu'il n'est pas difficile d'en trouver une valeur "universelle", à un temps t donné - cette valeur est observée sur le marché des taux d'intérêt. Pour la volatilité, en revanche, le calcul pose problème. En effet, il n'en existe pas de valeur unique, ni de manière préétablie pour la calculer (voir cependant la dernière section). Une bonne introduction à la volatilité est également à puiser dans [1], ou bien encore dans [4].

Dans les faits, les prix des options ne sont pas calculés avec la formule de Black-Scholes. La plupart du temps, ces prix résultent simplement de la loi de l'offre et de la demande, laquelle règne sur la plupart des marchés. Quand on regarde alors l'expression non réduite

$$Call_{market} = S_0 N \left(\frac{ln(S_0/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - Ke^{-rT} N \left(\frac{ln(S_0/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}, \right)$$

il s'agit d'une équation à une inconnue, puisque la seule valeur qui manque est σ. La volatilité implicite est donc la valeur σ^* pour laquelle cette équation est vraie:

$$Call_{market}(S_0, K, r, T) = Call_{BS}(S_0, K, r, \sigma^*, T) \quad \text{ou identiquement} \quad Call_{market} = Call_{BS}(\sigma^*) \tag{1.2}$$

On peut souligner l'unicité de cete solution car la fonction $\sigma \to Call_{BS}(S_0, K, r, \sigma, T)$ est strictement croissante de $[0, +\infty[$ à $]0, S_0[$ (la dérivée de cette fonction est appelée "véga" et est donnée plus loin et est strictement positive).

2 Pratique

2.1 Calcul

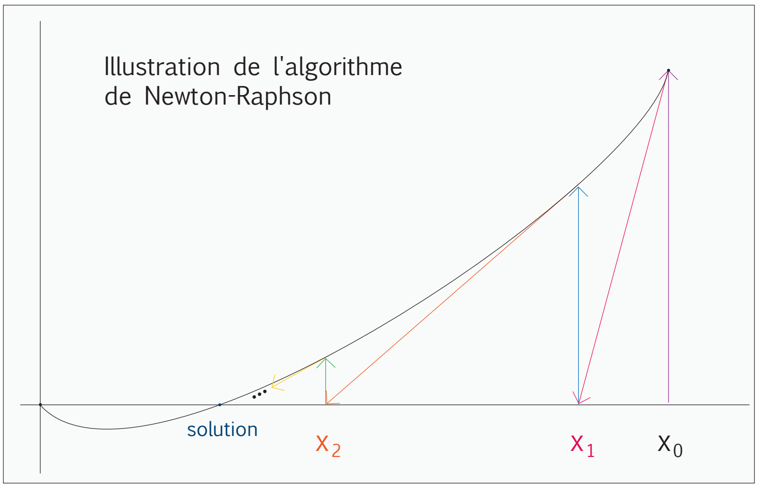
Le problème pour résoudre l'équation ci-dessus est qu'elle fait intervenir des intégrales. Il faut donc avoir recours à des procédures numérique pour en approximer la solution.
Une méthode intuitive serait de commencer par une volatilité très élevée, puis de baisser progressivement pour se rapprocher de la bonne valeur, en tâtonnant. Cependant, il est possible d'améliorer cette idée en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson (c'est notamment fait dans [3] et [5]). L'idée est que grâce à la formule de Taylor pour une fonction f dérivable au moins une fois:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

et on cherche à rrésoudre $f(x_1) = 0$, ie $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Graphiquement, x_1 est le point qui est à l'intersection entre la tangente de la courbe au point x_0 et l'axe des abscisses. On voit alors que l'on se rapproche de la solution en suivant la direction de la courbe. Il reste alors à itérer le processus grâce à la formule de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.1}$$

Très vite, x_n converge vers la solution, comme le montre la figure ci-dessous.



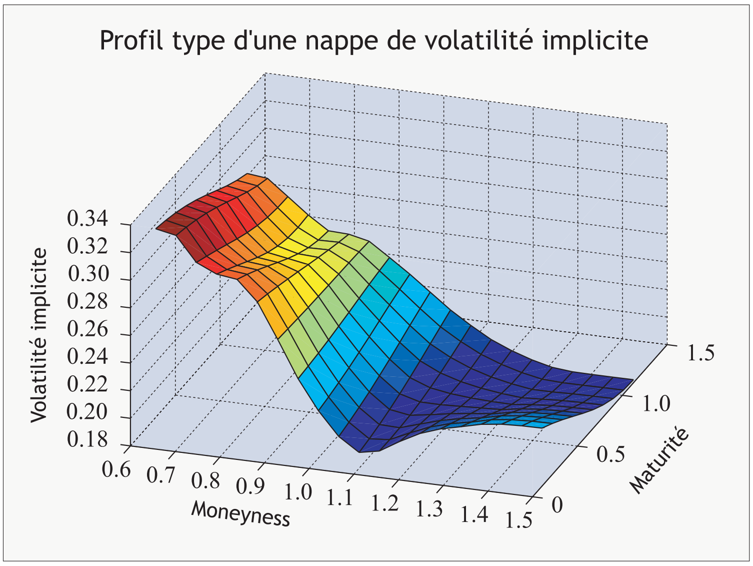
Dans notre cas, comme S_0, K, r et T so t fixés, nous considérons la fonction compliquée de l'équation 1.1 comme une fonction d'une seule variable: $Call_{BS}(\sigma) - Call_{market}$. Dans la théorie, la dérivée de cette fonction, qui est la dérivée du prix du call par rapport à la volatilité s'appelle le "véga" et appartient à un ensemble nommé les "grecques" (nota: "véga" n'est pourtant pas une lettre grecque). Analytiquement, on en trouve la formule en dérivant simplement 1.1 par rapport à σ et on obtient, après simplifications:

$$vega = \frac{\partial Call_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{S_0\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

Nous avons donc les expressions de f et f' et il est possible de lancer la récurrence 2.1. En fonction du langage utilisé, cela doit prendre entre 15 et 20 lignes de code.

2.2 Pour aller plus loin

Dans la pratique, le calcul de la volatilité implicite est effectué, à sous-jacent donné, pour plusieurs valeurs de K et de T. Au final, au lieu de n'avoir qu'un seul point, on obtient une nappe comme celle-ci qui provient de [2]:



La Moneyness représente le rapport entre S_0 et K.

Sur les marchés, les agents (surtout les traders) regardent en permanence les surfaces de volatilité implicite. Au vu des formules décrites ci-dessus, il existe une relation de bijection entre les volatilités implicites et les prix des options (quand on connait l'une on connait l'autre via 1.2). Dans la pratique, les traders préfèrent souvent utiliser les volatilités implicites, car elles représentent une quantité facile à appréhender: cela est plus intuitif, cela donne une meilleure idée des fluctuations du marché.
Le souci, c'est que ces surfaces ne sont pas statiques: elles bougent tous les jours. La connaissance (en fait plutôt l'approximation) de la dynamique des nappes de volatilité est donc un sujet crucial. Et très compliqué.
Une approche classique consiste à faire des hypothèses sur le comportement du sous-jacent. Parfois il existe des formules fermées (comme dans le modèle de Black-Scholes), mais souvent il faut faire appel à des méthodes numériques pour obtenir le prix l'option correspondante. Et ensuite, il est possible d'inverser le prix via 1.2 pour obtenir la volatilité implicite. La plupart des modèles dépendent d'un certain nombre de paramètres (2 pour le modèle de Black-Scholes et jusqu'à 5 ou 6 pour les plus compliqués). L'idéal serait alors de voir comment évolue la nappe de volatilité en fonction des paramètres du modèle. Le problème, c'est que la nappe comporte beaucoup de points ($k * t$ si on considère k strikes différents et t maturités), ce qui rend le problème insoluble.
Il faut alors choisir: soit conserver un modèle d'origine et essayer d'approcher plus ou moins grossièrement la dynamique de la nappe de volatilité implicite, soit laisser tomber le modèle du sous-jacent et formuler des hypothèses directement sur l'évolution de la volatilité implicite. C'est notamment ce qu iest fait dans [2] via une approche de type Analyse en Composantes Principales (la bibliographie est d'ailleurs très complète sur le sujet de la volatilité implicite).

3 La volatilité historique

Dans les faits, il est existe une formule pour calculer la volatilité ex-post d'un actif. Si on considère p_{t_i} le prix de l'actif à l'instant t_i, on définit alors le log-rendement de cet actif en fonction de instant t_i et sur une distance Δt:

$$r_{t_i}(\Delta t) = ln(p_{t_i}/p_{t_i - \Delta t})$$

à partir de celà, on construit la volatilité, qui dépend non seulement de t_i et Δt, mais aussi d'un paramètre n qui représente le nombre de points que l'on souhaite intégrer dans le calcul:

$$v(t_1, n, \Delta t) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| r_{t_j - j}(\Delta t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} r_{t_k - k}(\Delta t) \right|^2 \right)^{1/2}$$

où $t_i - t_{i-1}$ est constant et t_1 est l'instant présent (ou du moins à partir duquel on calcul la volatilité passée). En fait, plus n est grand et plus on va chercher loin dans le passé de l'actif, alors que plus Δt est petit et plus on considère des intervalles fins pour calculer les rendements (en deçà de 5 minutes, on entre dans le domaine de la haute fréquence, pour les marchés financiers). Il arrive souvent que dans la litérature, $v(i, n, \Delta t)$ soit normalisée par une constante $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

References

[1] F. Aftalion, P. Poncet, *Le point sur... la volatilité*, Banque et Marchés, n°69, mars-avril 2004

[2] R. Cont, J. da Fonseca, *Dynamics of Implied Volatility Surface*, Quantitative Finance, Volume 2 (2002), Pages 45-60

[3] J. London, *Modelling Derivatives in C++* (2004), Wiley

[4] P. Poncet, R. Portait, *Finance de Marché* (2009, 2ème édition), Dalloz

[5] P. Wilmott, *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance* (2001), Wiley